

Fonctions logarithmes

➤ Fonction Logarithme népérienne :

- Définition :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 et notée **ln**

- Conséquences et propriétés :

$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x \quad r \in \mathbb{Q}$ $\ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\ln x$ $\ln \left(\frac{x}{y} \right) = \ln x - \ln y$
$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in]0; +\infty[$	
$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$		
$\forall x \in]0; +\infty[$	$\forall y \in \mathbb{R}$	
$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$		

- Domaine de définition :

f une fonction numérique de la variable réelle x définie par :	Domaine de définition de f :
$f(x) = \ln \left[u(x) \right]$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0 \}$
$f(x) = \ln \left[u(x)^2 \right]$	$D_f = \{ x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) \neq 0 \}$
$f(x) = \ln u(x) $	

- Limites usuelles :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \ln x = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x^n \ln x = 0$	
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

- Continuité:

La fonction **ln** est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est continue sur I alors la fonction $x \mapsto \ln \left[u(x) \right]$ est continue sur I

• **Dérivabilité :**

La fonction \ln est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$

et on a : $\forall x \in]0; +\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

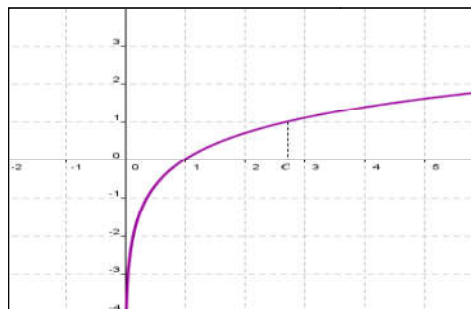
Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est dérivable sur I

alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I

et on a : $\forall x \in I \quad (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

• **Signe et représentation graphique de \ln :**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+



➤ **Fonction Logarithme de base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:**

• **Définition :**

La fonction **logarithme de base a** est la fonction

définie par : $\forall x \in]0; +\infty[\quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Cas particulier : si $a=10$, \log_a est le logarithme décimal. On le note \log

• **Conséquences et propriétés :**

$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[$ $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\log_a(x^r) = r \log_a(x) \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$
	$\forall x \in]0; +\infty[\quad \forall y \in]0; +\infty[\quad \forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y$ $\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$
$0 < a < 1$	$a > 1$
$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$	$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$
$\forall x \in]0; +\infty[\quad [\log_a(x)]' = \frac{1}{x \ln a}$	